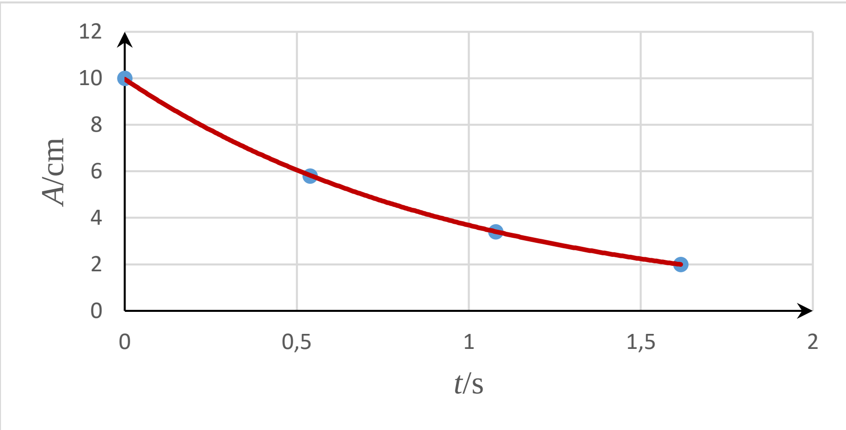
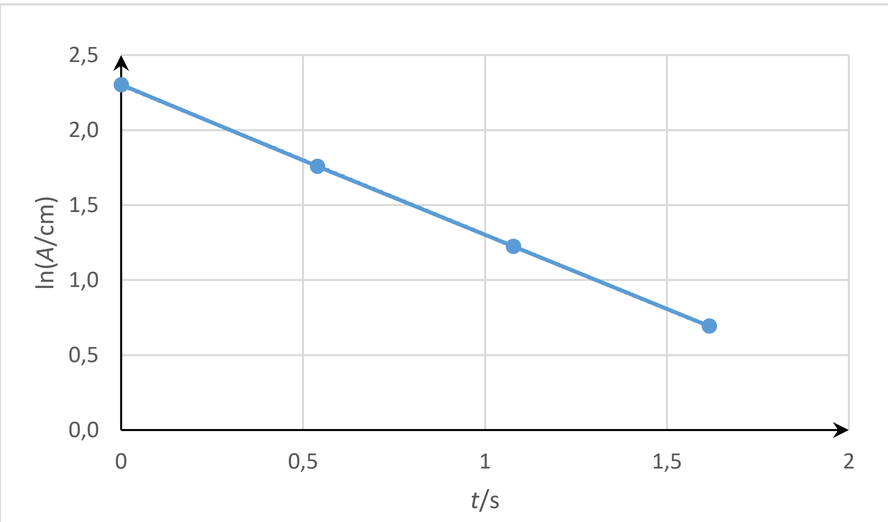
Barem Subiectul I....		**Parțial**	**Punctaj**
a.	Utilizând datele din tabel, graficul obținut arată o scădere exponențială, conform figurii de mai jos 	0,50	**1,50**
	La oscilațiile amortizate amplitudinea este dată de relația: $$A = A_0 e^{-\delta t}$$ unde A_0 este amplitudinea inițială, t este timpul.	0,30	
	Reprezentând datele în coordonate semilogaritmice, rezultă: 	0,30	
	Panta graficului dă valoarea lui $$-\delta = -0{,}9954\ \mathrm{s}^{-1} \cong -1{,}00\ \mathrm{s}^{-1}.$$	0,40	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

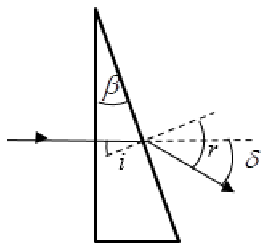
Barem Subiectul I....		**Parțial**	**Punctaj**
	În starea perturbată, energia cinetică a sistemului oscilant este $$E_c = \frac{mv^2}{2},$$ iar energia potențială $$E_p = \frac{kx_1^2}{2} + mgh,$$	0,20 0,20	
	unde $$x_1 = \frac{l}{2}\sin\theta \cong \frac{l\theta}{2},$$ iar $$h = l(1-\cos\theta) \cong \frac{l\theta^2}{2}.$$	0,20 0,20	
b.	Energia scade în timp din cauza acţiunii forţei de rezistenţă asupra corpului, aşa încât $$\frac{dE}{dt} = -F_r v = -bv^2,$$ de unde $$mv\frac{dv}{dt} + \left(\frac{kl^2}{4} + mgl\right)\theta\frac{d\theta}{dt} = -bv^2.$$	0,30	**3,00**
	Viteza corpului este $$v = \frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt},$$	0,20	
	iar coordonata x a corpului este $$x = l\sin\theta \cong l\theta = s,$$	0,20	
	de unde rezultă ecuația de mișcare a corpului $$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \frac{k_e}{m}x = 0,$$	0,30	
	unde		

Barem Subiectul I....		**Parțial**	**Punctaj**
	$\delta = \dfrac{b}{2m}$ este coeficientul de amortizare, iar	0,10	
	$k_e = \dfrac{k}{4} + \dfrac{mg}{l} = 3{,}5\ \mathrm{N/m}$ este constanta elastică echivalentă a oscilatorului cu masa m.	0,20	
	Legea de mișcare a oscilatorului este $x = A_0 e^{-\delta t} cos\omega t,$	0,30	
	deoarece la momentul inițial viteza oscilatorului este nulă, adică $\varphi_0 = 0.$	0,20	
	Pulsația oscilațiilor amortizate este dată de relația; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\dfrac{k_e}{m}\right)^2 - \delta^2} = \sqrt{34}\ \mathrm{rad/s},$	0,20	
	Frecvența oscilațiilor fiind $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = 0{,}928\ \mathrm{Hz}.$	0,20	
c.	$F_r = bv,\ b = 2\delta m = 0{,}2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}},$	0,30	**1,50**
	$v = -A_0 e^{-\delta t}(\delta\ cos\omega t + \omega \sin \omega t)$	0,30	
	La $t = \frac{3T}{5},\ \omega t = \frac{6\pi}{5}$ iar $e^{-\delta t} = e^{-6\pi\delta/5\omega} = 3{,}945 \cdot 10^{-2},$	0,30	
	de unde $v = -A_0 e^{-\frac{6\pi\delta}{5\omega}}(\delta \cos\dfrac{6\pi}{5} + \omega \sin\dfrac{6\pi}{5}) = 1{,}67 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s}$	0,30	
	$F = -2\delta m A_0 e^{-\frac{6\pi\delta}{5\omega}}\left(\delta \cos\dfrac{6\pi}{5} + \omega \sin\dfrac{6\pi}{5}\right) = 3{,}34 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}.$	0,30	

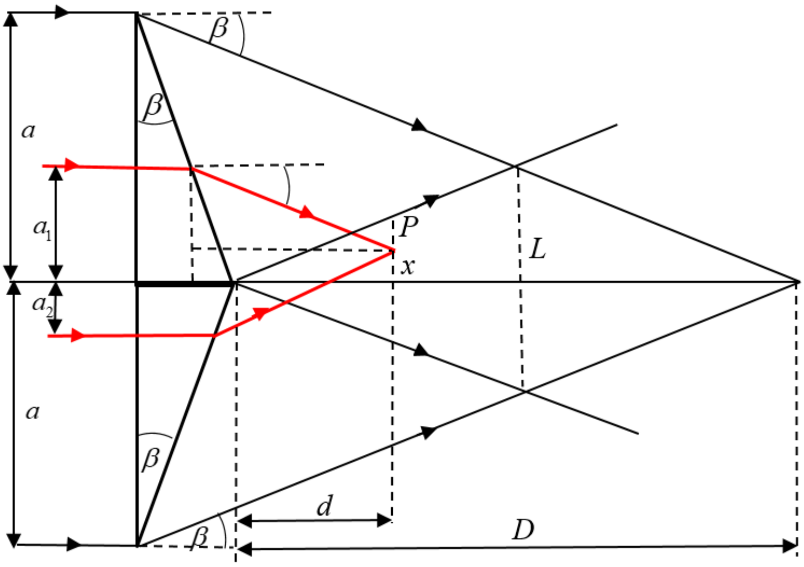
1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

d.	$$\langle F_r \rangle = -b\langle v \rangle$$	0,40	**3,00**
	$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$	0,40	
	unde $$\Delta t = \frac{T}{4} - 0 = \frac{T}{4},$$	0,20	
	iar $$\Delta x = x\left(\frac{T}{4}\right) - x(0),$$	0,20	
	unde $$x\left(\frac{T}{4}\right) = A_0 e^{-\delta T/4} cos\frac{\omega T}{4} = A_0 e^{-\delta T/4} cos\frac{\pi}{2} = 0,$$	0,40	
	iar $$x(0) = A_0.$$	0,40	
	Prin urmare, $$\langle v \rangle = -\frac{4A_0}{T} = -\frac{2\omega A_0}{\pi},$$	0,40	
	iar $$\langle F_r \rangle = \frac{2b\omega A_0}{\pi} = \frac{4m\delta\omega A_0}{\pi}.$$	0,40	
	Numeric: $$\langle F_r \rangle = 7{,}42 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}.$$	0,20	
Oficiu			**1,00**
Total subiectul I			**10,00**

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

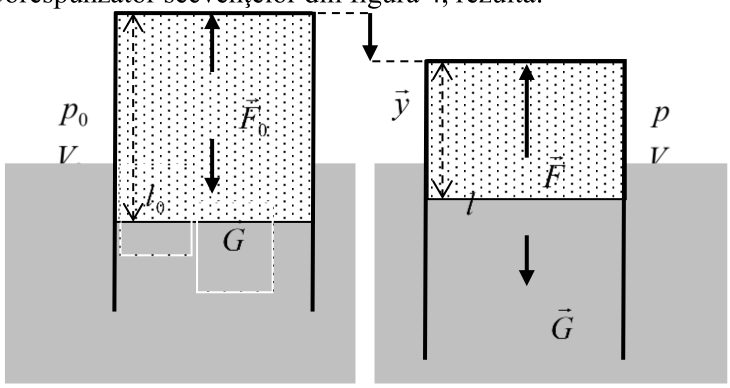
<table>
<tr><th colspan="2">Barem Subiectul II....</th><th>Parțial</th><th>Punctaj</th></tr>
<tr><td></td><td>Subiect II A (2p)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">a.</td><td>Energia oscilatorului armonic: $E=\frac{p^2}{2m}+m\omega^2\frac{x^2}{2}=m\omega^2\frac{A^2}{2}$;</td><td>0,30</td><td rowspan="6">2p</td></tr>
<tr><td>Deducem $p=m\omega\sqrt{A^2-x^2}$;</td><td>0,20</td></tr>
<tr><td>Lungimea de undă asociată oscilatorului: $\lambda=h/p$</td><td>0,20</td></tr>
<tr><td>Condiția de staționaritate a undei asociate de-a lungul traiectoriei oscilatorului:
$2\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\lambda}=n$, unde n este un număr natural nenul;</td><td></td></tr>
<tr><td>De aici:
$2\int_{-A}^{A}pdx=nh\Rightarrow 2m\omega\int_{-A}^{A}\sqrt{A^2-x^2}dx=nh\Rightarrow \pi m\omega A^2=nh\Rightarrow A_n=\sqrt{\frac{2n\hbar}{m\omega}}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Apoi nivelele de energie cuantificate $E_n=m\omega^2\frac{A_n^2}{2}=n\omega\hbar$</td><td>0,30</td></tr>
<tr><td></td><td>Subiect II B (7p)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">a.</td><td></td><td>0,5 p</td><td rowspan="5">2p</td></tr>
<tr><td>$\delta=r-i=r-\beta$</td><td>0,25 p</td></tr>
<tr><td>$n\cdot\sin i=\sin r$</td><td>0,5 p</td></tr>
<tr><td>$i,r\ll 1rad\Rightarrow ni\simeq r\Rightarrow r\simeq n\beta$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>În final
$\delta\simeq(n-1)\beta$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>Fie P un punct oarecare situat pe ecranul de observare, așezat la distanța d de dispozitiv și la distanța x față de axa de simetrie a dispozitivului. Notăm cu a_1 și a_2 distanțele de la razele fasciculului care vor interfera în punctul P, până la axa de simetrie.</td><td>0,5</td><td>4p</td></tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	 		
	Avem relațiile: $\delta \simeq tg\delta = \dfrac{a_1 - x}{d + a_1\beta} \Rightarrow a_1 = \dfrac{x + d\delta}{1 - \beta\delta} \simeq x + (n-1)\beta d$ $\delta \simeq tg\delta = \dfrac{a_2 + x}{d + a_2\beta} \Rightarrow a_2 = \dfrac{-x + d\delta}{1 - \beta\delta} \simeq -x + (n-1)\beta d$ Drumurile optice ale razelor care interferă: $\Delta_1 \simeq n(a - a_1)\beta + d + a_1\beta \Rightarrow \Delta_1 \simeq na\beta - (n-1)\beta x + d$; $\Delta_2 \simeq n(a - a_2)\beta + d + a_2\beta \Rightarrow \Delta_2 \simeq na\beta + (n-1)\beta x + d$; Diferența de drum optic dintre razele care interferă: $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1 \Rightarrow \Delta = 2(n-1)\beta x$ Condiția de maxim de interferență: $\Delta = 2k.\lambda/2, k \in \mathbb{Z}$ conduce la pozițiile maximelor: $x_k = k.\dfrac{\lambda}{2(n-1)\beta}, k \in \mathbb{Z}$ Interfranja: $i = x_{k+1} - x_k \Rightarrow i = \dfrac{\lambda}{2(n-1)\beta} \Rightarrow \beta = \dfrac{\lambda}{2i(n-1)}; \beta = 7 \cdot 10^{-4}$ rad	0,4 p 0,4 p 0,5 p 0,5 p 0,3 p 0,1 p 0,4 p	
	Regiunea (câmpul) de interferență are forma unui romb cu diagonala mare D și diagonala mică L. $\delta \simeq tg\delta = \dfrac{a}{D + a\beta} \Rightarrow D = \dfrac{a}{\delta} - a\beta \simeq \dfrac{a}{(n-1)\beta} \Rightarrow$ $2a = D(n-1)\beta;\ 2a = 7$ mm	0,3	
	Apoi $\dfrac{L}{2a} = \dfrac{D/2}{D + a\beta} \simeq \dfrac{1}{2} \Rightarrow L \simeq a;\ L \simeq 3,5$ mm	0,3	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	Numărul maxim de franje luminoase ce se pot forma pe ecran: $N_{\max} = 2 \cdot \left[\frac{L}{i}\right] + 1;\ N_{\max} = 7$	0,3	
c.	$i_1 = \frac{\lambda_1}{2(n_1 - 1)\beta};\ i_1 = 0,6\ \text{mm};\ i_2 = \frac{\lambda_2}{2(n_2 - 1)\beta};\ i_2 = 1\ \text{mm}$	0,4	**1p**
	Numărul maxim de franje luminoase corespunzătoare radiației λ_1 este $2 \cdot \left[L/i_1\right] + 1 = 11$, iar cel corespunzător radiației λ_2 este $2 \cdot \left[L/i_2\right] + 1 = 7$.	0,4	
	Observăm că $3i_2 = 5i_1$, prin urmare trei franje luminoase ale radiației λ_1 se suprapun peste trei franje luminoase ale radiației λ_2. În consecință, numărul maxim de franje luminoase monocromatice distincte formate pe ecran va fi: 11+7 - (3+3)=12.	0,2	
Oficiu			**1**
Total subiectul II			**10**

Barem Subiectul III....		**Parțial**	**Punctaj**
a.	Corespunzător secvențelor din figura 4, rezultă: 	0,5	**2,00**
	$G = mg;\ F_0 = p_0 S;\ F_0 = mg;\ \ p_0 S = mg;\ p_0 = \frac{mg}{S};$ $p_0 V_0 = pV;\ p = p_0 \frac{V_0}{V} = \frac{mg}{S}\frac{l_0}{l};$ $F = pS = mg\frac{l_0}{l};\ l = l_0 - y;\ y << l_0;$ $F = mg\frac{l_0}{l_0 - y} = mg\frac{l_0}{l_0\left(1 - \frac{y}{l_0}\right)} = mg\left(1 - \frac{y}{l_0}\right)^{-1};$	0,5	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

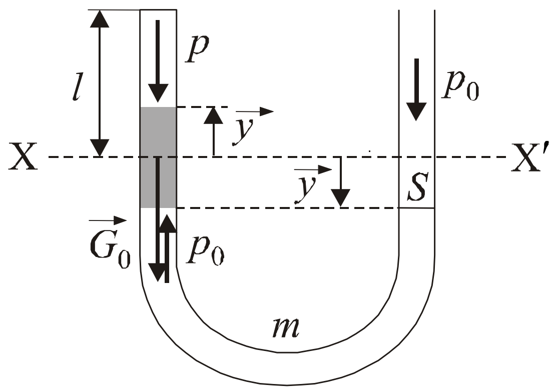
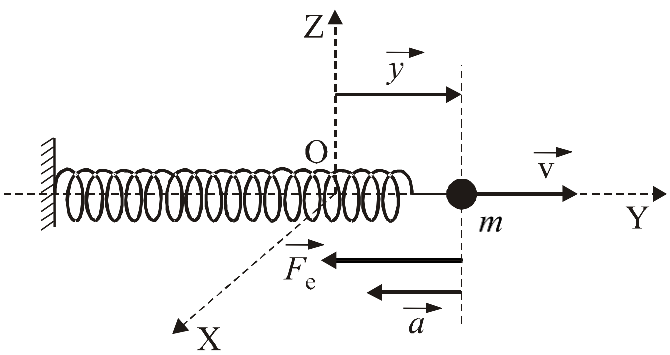
<table>
<tr>
<td rowspan="3"></td>
<td>$$F \approx mg\left(1+\frac{y}{l_0}\right); \vec{R}=\vec{F}+\vec{G}; \ R=F-G;$$
$$R=mg\left(1+\frac{y}{l_0}\right)-mg; \ R=\frac{mg}{l_0}y; \ k=\frac{mg}{l_0};$$
$$R=ky; \ \vec{R}=-k\vec{y},$$
ceea ce dovedeşte că oscilaţiile verticale mici ale paharului sunt oscilaţii armonice;</td>
<td></td>
<td rowspan="3"></td>
</tr>
<tr>
<td>$$y=A\sin(\omega t+\varphi);$$
unde A este amplitudinea oscilațiilor paharului, iar ω este pulsația oscilațiilor paharului;
$$\mathrm{v}=\omega A\cos(\omega t+\varphi); \ \mathrm{v}=\mathrm{v}_{max}\cos(\omega t+\varphi); \ \mathrm{v}_{max}=\omega A;$$
$$a=-\omega^2 A\sin(\omega t+\varphi); \ a=-a_{max}\sin(\omega t+\varphi); \ a_{max}=\omega^2 A;$$
$$\vec{a}=-\omega^2\vec{y}; \ a=\omega^2 y,$$
unde v și a sunt viteza și respectiv accelerația instantanee ale oscilațiilor paharului;</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>$$\vec{R}=m\vec{a}; \ R=ma;$$
$$ky=ma; \ ky=ma; \ ky=m\omega^2 y;$$
$$k=m\omega^2=m\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{mg}{l_0}; \ T=2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}},$$
reprezentând perioada oscilațiilor verticale mici ale paharului.</td>
<td>0,5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">b.</td>
<td>În desenul din figura 5 este evidențiată diferența de nivel dintre cele două coloane ale lichidului din tub, într-un moment oarecare, atunci când rezultanta forțelor care acționează pentru revenirea sistemului în starea de echilibru este:


Fig. 5</td>
<td>0,5</td>
<td rowspan="2">2,00</td>
</tr>
<tr>
<td>$$F = G_0 + (p - p_0)S;$$
$$p(l - y) = p_0 l;$$
$$p = \frac{p_0 l}{l-y} = p_0\left(1-\frac{y}{l}\right)^{-1} \approx p_0\left(1+\frac{y}{l}\right);$$</td>
<td>1,00</td>
</tr>
</table>

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$p - p_0 = p_0\frac{y}{l}$; $G_0 = m_0 g = 2yS\rho g$; $F = S\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)y$; $k = S\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)$; $F = ky$; $\vec{F} = -k\vec{y}$, ceea ce evidențiază că oscilațiile mici ale coloanei de mercur sunt armonice.		
	În aceste condiții, rezultă: $k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}$; $k = S\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)$; $\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)S = m\frac{4\pi^2}{T^2}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S\left(2\rho g + \frac{p_0}{l}\right)}}$.	0,5	
c.	Mișcarea oscilatorului fiind rectilinie, atunci, și în variantă relativistă, direcția forței elastice, $\vec{F}_e$, este aceeași cu direcția vectorului accelerație, $\vec{a}$, și aceeași cu direcția vectorului viteză, $\vec{v}$, așa cum indică desenul din figura 6. **Fig. 6**  În acord cu legea conservării energiei totale a sistemului, scrisă pentru momentul trecerii oscilatorului printr-o poziție extremă și pentru un moment oarecare, rezultă: $m \cdot c^2 + \frac{k \cdot y^2}{2} = m_0 \cdot c^2 + \frac{k \cdot A^2}{2}$; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$;	**1.00**	**4,00**

$$\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{k\cdot y^2}{2}=m_0\cdot c^2+\frac{k\cdot A^2}{2},$$

unde A este amplitudinea oscilațiilor;

$$\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=m_0\cdot c^2+\frac{k\cdot\left(A^2-y^2\right)}{2};\quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=1+\frac{k\cdot\left(A^2-y^2\right)}{2\cdot m_0\cdot c^2};$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{1+\frac{k\cdot\left(A^2-y^2\right)}{2\cdot m_0\cdot c^2}};$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

$$\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{1}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

$$v^2=c^2-\frac{c^2}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

$$v^2=\frac{c^2\cdot\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2-c^2}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

$$v^2=\frac{c^2\cdot\left[1+2\cdot\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)+\frac{k^2}{4\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot\left(A^2-y^2\right)^2\right]-c^2}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

$$v^2=\frac{c^2\cdot\left[\frac{k}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)+\frac{k^2}{4\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot\left(A^2-y^2\right)^2\right]}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$

	$$\mathrm{v}^2=\frac{\left[\frac{k}{m_0}\cdot\left(A^2-y^2\right)+\frac{k^2}{4\cdot m_0^2\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)^2\right]}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$ $$\mathrm{v}^2=\frac{\frac{k}{m_0}\cdot\left(A^2-y^2\right)\cdot\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]}{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^2};$$ $$\mathrm{v}=\frac{\sqrt{\frac{k}{m_0}\cdot\left(A^2-y^2\right)\cdot\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]}}{1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)},$$ astfel încât durata, $\mathrm{d}t$, a deplasării punctului material din punctul de coordonată y până în punctul de coordonată $y+\mathrm{d}y$, când viteza sa se poate considera constantă, v, este: $$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{v}}.$$		
	În aceste condiții perioada oscilațiilor armonice relativiste este: $$T=4\cdot\int_0^A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{v}};$$ $$T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}{\sqrt{(A^2-y^2)\cdot\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]}}\cdot\mathrm{d}\,y.$$ $$T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}{\sqrt{A^2-y^2}\cdot\sqrt{\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]}}\cdot\mathrm{d}\,y.$$ $$T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}{\sqrt{A^2-y^2}}\cdot\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^{-1/2}\cdot\mathrm{d}\,y.$$	**1,00**	

	Admițând că : $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}}=\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^{-1/2}\approx$$ $$\approx 1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2),$$ rezultă: $$\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]=1+\frac{k\cdot A^2}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\frac{1}{2\cdot A^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=$$ $$=1+\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right);$$ și știind din enunțul problemei, că: $$\frac{k\cdot A^2}{2}<<m_0\cdot c^2;\;\; y<A,$$ rezultă : $$\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right)<<1;$$ $$\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)<<1;$$ $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}}=\left[1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]^{-1/2}\approx$$ $$\approx 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2);$$ $$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{4\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}}\approx 1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2);$$ $$T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)}{\sqrt{A^2-y^2}}\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]\cdot \mathrm{d}\,y;$$	**0,50**	

	$$T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]}{\sqrt{A^2-y^2}}\cdot\mathrm{d}\,y;$$ $$\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]=$$ $$=1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)--\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)-$$ $$\frac{k^2}{16\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot(A^2-y^2)^2;$$		
	rezultă: $$\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right);$$ $$\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}<<1;\ \frac{y}{A}<1;\ \frac{y^2}{A^2}<1;\ 1-\frac{y^2}{A^2}<1;$$ $$\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right);$$ $$\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}<<1;\ 1-\frac{y^2}{A^2}<1;$$ $$\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)<1;$$ $$\frac{k^2}{16\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot(A^2-y^2)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k^2}{4}}{m_0^2\cdot c^4}\cdot\left(A^2-y^2\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k^2\cdot A^4}{4}}{m_0^2\cdot c^4}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right)^2;$$ $$\frac{k^2}{16\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot(A^2-y^2)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{k\cdot A^2}{2}\right)^2}{\left(m_0\cdot c^2\right)^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\right)^2;$$	**0,50**	

	$\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{A^2}\right)<1;\ \Rightarrow\ \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\right)^2<<1;$ $\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]=$ $=1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)-\frac{k^2}{16\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot(A^2-y^2)^2;$ $\frac{k^2}{16\cdot m_0^2\cdot c^4}\cdot(A^2-y^2)^2=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}\cdot\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\right)^2<<1;$ $\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]=$ $=1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2);$		
	rezultă: $\left[1+\frac{k}{2\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]\cdot\left[1-\frac{k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2)\right]\approx$ $\approx 1+\frac{3\cdot k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot(A^2-y^2);$ $T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\int_0^A\frac{\left[1+\frac{3\cdot k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\left(A^2-y^2\right)\right]}{\sqrt{A^2-y^2}}\cdot\mathrm{d}\,y;$ $T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\left[\int_0^A\frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{A^2-y^2}}+\frac{3\cdot k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\int_0^A\sqrt{A^2-y^2}\cdot\mathrm{dy}\right];$ $\int_0^A\frac{dy}{\sqrt{A^2-y^2}}=\frac{\pi}{2};\ \int_0^A\sqrt{A^2-y^2}\cdot\mathrm{dy}=\frac{\pi A^2}{4};$ $T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot k}{8\cdot m_0\cdot c^2}\cdot\frac{\pi\cdot A^2}{4}\right);\ T=4\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\cdot k\cdot\pi\cdot A^2}{32\cdot m_0\cdot c^2}\right);$ $T=4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot k\cdot A^2}{16\cdot m_0\cdot c^2}\right);$	**1,00**	

1. Orice rezolvare corectă ce ajunge la rezultatul corect va primi punctajul maxim pe itemul respectiv.
2. Orice rezolvare corectă, dar care nu ajunge la rezultatul final, va fi punctată corespunzător, proporțional cu conținutul de idei prezent în partea cuprinsă în lucrare din totalul celor ce ar fi trebuit aplicate pentru a ajunge la rezultat, prin metoda aleasă de elev.

	$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}\cdot\left(1+\frac{3\cdot k\cdot A^2}{16\cdot m_0\cdot c^2}\right),$$ reprezentând perioada oscilatorului armonic relativist, analizat în această problemă.		
d.	*Caz particular*: $$\frac{k\cdot A^2}{2} << m_0\cdot c^2;\ \Rightarrow q=\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}<<1;$$ $$\frac{3\cdot k\cdot A^2}{16\cdot m_0\cdot c^2}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\frac{k\cdot A^2}{2}}{m_0\cdot c^2}=\frac{3}{8}\cdot q;\ \ q<<1;$$ $$\frac{3\cdot k\cdot A^2}{16\cdot m_0\cdot c^2}<<<1;\ \Rightarrow T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_0}{k}}.$$	**1,00**	**1,00**
Oficiu			**1**
Total subiectul III			**10**

Barem propus de:

Prof. Dr. Luciu Alexandrescu, *Centrul Județean de Excelență, Brașov*

Prof . Cristian Miu, *Colegiul Național „Ion Minulescu" Slatina*

Prof. dr. Mihail Sandu, *Călimănești*

Coordonator: prof. Sorin TROCARU, *Liceul Teoretic „Aurel Vlaicu", Breaza*